

ANALYSIS

Extremwertaufgaben

Teil 1: Themenheft

Die wichtigsten Grundaufgaben

Übersicht über die Methodik

70 Musterbeispiele

Daten Nr. 49010

Stand 8. Sept. 2016

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Vorwort

Es gibt in der Analysis eine Reihe von Anwendungsaufgaben zu Funktionen, die man auch unter dem Begriff Maßfunktionen oder Extremwertaufgaben zusammenfasst. Dabei geht es um Folgendes:

Im Schaubild einer Funktion liegt irgendwo eine Strecke oder ein Dreieck / Viereck, von dem mindestens ein Eckpunkt irgendwie auf der Kurve dieses Schaubildes liegt. Verändert sich die Lage eines solchen Punktes, dann ändern sich auch Längen und Flächeninhalte. Man spricht dann von einer Längenfunktion, einer Umfangsfunktion, einer Flächeninhaltsfunktion usw. Diese Funktionen (man nennt sie auch Zielfunktionen) sind auf bestimmte Eigenschaften hin zu untersuchen.

Meistens nimmt diese Funktion für einen bestimmten Wert einen Extremwert an. Für eine ganz bestimmte Lage dieses Eckpunktes bekommt das Dreieck (z. B.) einen maximalen Flächeninhalt.

Im folgenden Manuskript wird in vielen Beispielen gezeigt, wie man Schritt für Schritt solche Aufgaben löst, und welche Typen von Aufgaben es gibt.

Die meisten Lösungen sind **ausführlich manuell** erstellt. Sehr viele Prüfungen dürfen an der Schule (nicht an der Hochschule) mit modernen leistungsfähigen Rechnern erstellt werden. Daher habe ich manchen Lösungen auch Anleitungen zur Arbeit mit einem **CAS-Rechner** beigelegt. Manche Gleichungen lassen sich auch nur mit einem speziellen Rechner lösen.

Bereits im **Text 18035** werden **Extremwertaufgaben** behandelt. Dort treten nur quadratische Funktionen auf, deren Extremwert man durch quadratische Ergänzung berechnen kann. Dir zugehörigen Lösungen sind also alle ohne Ableitungen durchgerechnet.

Im **Text 49011** werden **Extremwertaufgaben als Sachaufgaben** behandelt

Der **Text 49012** ist für höhere Ansprüche, weil **Extremwertaufgaben mit 2 Variablen** auftreten

Der **Text 49013** enthält eine **großartige Musteraufgabe**, die sich zur Einführung oder aber zur Wiederholung zur Abitur eignet.

Der **Text 71181** enthält **Abitur-Pflichtaufgaben** zum Thema Extremwert.

Der **Text 43040** enthält **Intensivtraining** an Hand von 5 gebrochen rationalen Funktionen mit ausführlichen Hintergrundinformationen.

Ausführliches Inhaltsverzeichnis

Hintergrundwissen 10

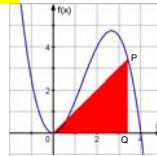
Übersicht 12

Grundaufgabe 1: Flächeninhaltsfunktionen 14

(A) Dreiecke mit Eckpunkt auf einer Kurve 14

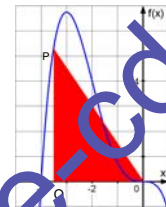
1.01: $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2$ **Mit CAS!**

(S. 14)



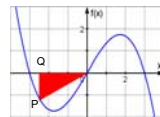
1.02: $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - x^3$

(S. 17)



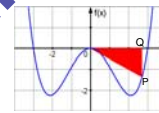
1.03: $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x$

(S. 19)



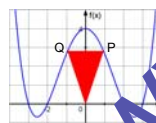
1.04: $f(x) = \frac{1}{9}x^4 - x$ **Mit CAS!**

(S. 20)



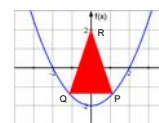
1.05: $f(x) = \frac{1}{9}x^4 - \frac{13}{9}x^2 + 4$

(S. 22)



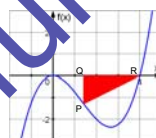
1.06: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$

(S. 23)



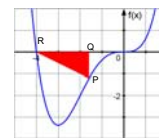
1.07: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2$

(S. 25)



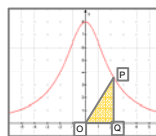
1.08: $f(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3$

(S. 16)



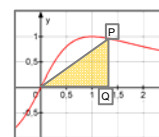
1.09: $f(x) = \frac{32}{x^2 + 4}$ **Mit CAS!**

(S. 27)



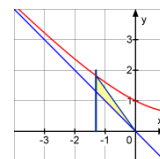
1.10: $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

(S. 29)



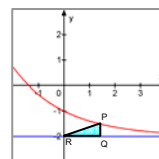
1.11: $f_t(x) = e^{\frac{1}{2}x} - x$ **Mit CAS!**

(S.30)



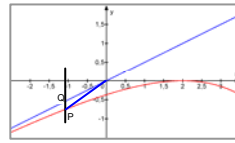
1.12: $f_t(x) = e^{-\frac{1}{2}x} - 2$

(S. 32)



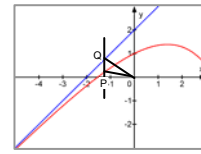
1.13: $f(x) = \frac{1}{2}x - e^{\frac{1}{2}x-1}$

(S. 33) CAS!



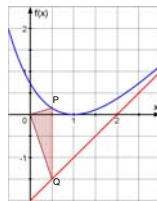
1.14: $f(x) = x + 2 - e^{\frac{1}{2}x}$

(S. 35)



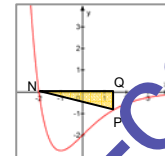
1.15: $f(x) = e^{1-x} + x - 2$

(S. 36)



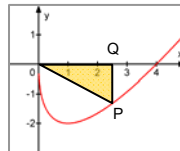
1.16: $f(x) = -(x+2) \cdot e^{-x}$

(S. 37)



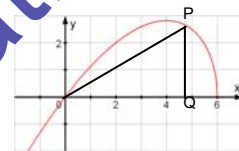
1.17: $f(x) = 2x - 4\sqrt{x}$

(S. 39)



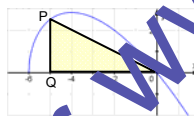
1.18: $f(x) = x \cdot \sqrt{6-x}$

(S. 40)



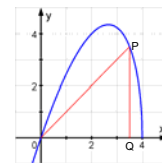
1.19: $f(x) = -\frac{1}{2}x \cdot \sqrt{x+6}$

(S. 42)



1.20: $f(x) = x \cdot \sqrt{8-2x}$

(S. 43)



(B) Andere Dreieckskonstruktionen

44

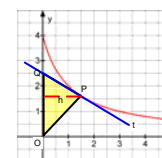
1.21: $f(x) = \frac{2}{x}$ (Tangente)

(S. 44)



1.22: $f(x) = \frac{4}{x+1}$ (Tangente) Mit CAS!

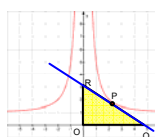
(S. 45)



1.23: $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2}$ (Tangente)

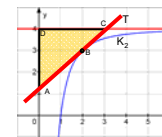
(S. 48)

CAS!



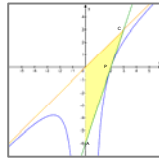
1.24: $f_t(x) = t^2 - \frac{4}{x^2}$

(S. 51)

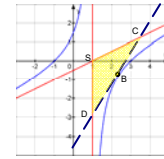


1.25: $f_a(x) = \frac{x^3 - 8a^3}{ax^2}$ (Tangente) 1.26: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$ (Tangente)

(S. 52)



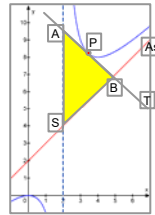
(S. 54)



1.27: $f_t(x) = \frac{x^2 - 4 + t}{x - 2}$ (Tangente)

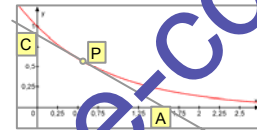
(S. 56)

Mit CAS!



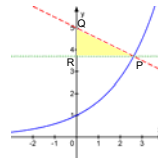
1.28: $f(x) = e^{-x}$ (Tangente)

(S. 57)



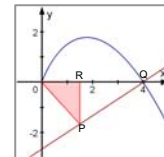
1.29: $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ (Normale)

(S. 59)



1.30: $f_t(x) = 3 \cdot (1 - t\sqrt{x})$

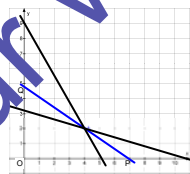
(S.61)



1.31: Fallende Geraden durch

(S. 63)

Mit CAS!

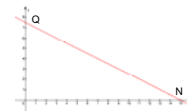


1.32: $g_t: y = \frac{1}{t} \cdot x + 6 - \frac{3}{t}$

(Geradenschar)

(S. 65)

Mit CAS!



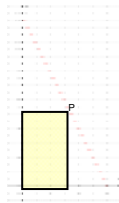
Demo-Text für www.mathe-cd.de

(C) Rechtecke mit extremem Inhalt

68

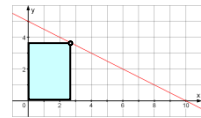
1.41: $y = -2x + 12$

(S.68)



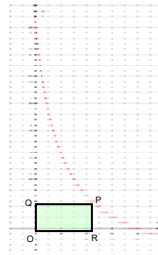
1.42: $y = -\frac{1}{2}x + 5$

(S. 69)



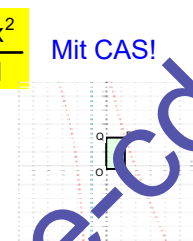
1.43: $f(x) = \frac{8-2x}{x+1}$

(S. 70)



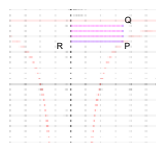
1.44: $f(x) = \frac{8-2x^2}{x+1}$ Mit CAS!

(S. 71)



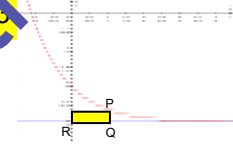
1.45: $f(x) = 4 - \frac{16}{x^2}$

(S. 73)



1.46: $f(x) = e^{-x} - 3$

(S. 75)



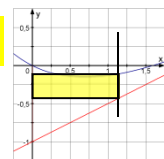
1.47: $f_t(x) = t - \frac{1}{2}e^x$

(S. 76)



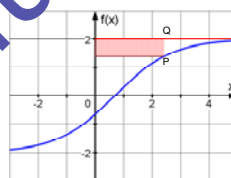
1.48: $f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + e^{-x}$

(S. 77)



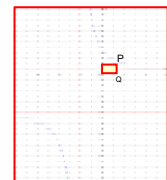
1.49: $f(x) = \frac{2e^x - 4}{e^x + 2}$

(S. 78)



1.50: $f(x) = \frac{2}{3 \cdot e^x - 1}$

(S. 80)

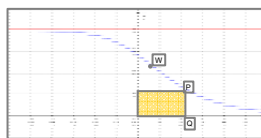


Mit CAS!

Mit CAS!

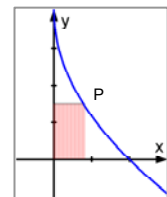
1.51: $f(x) = \frac{4}{\sqrt{1+e^x}}$

(S. 81)



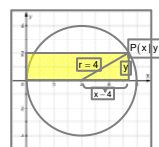
1.52: $f_t(x) = \frac{8}{t} \left(1 - \sqrt{\frac{x}{t}} \right)$

(S. 83)



1.53: $(x-4)^2 + y^2 = 16$

(S. 85) CAS!



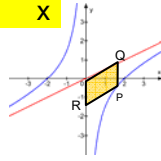
Demo-Text für www.mathe-cd.de

(D) Parallelogramm-Inhalte

88

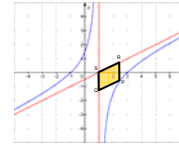
$$1.61: f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x} = \frac{x}{2} - \frac{2}{x}$$

(S. 88)



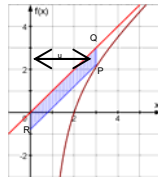
$$1.62: f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$$

(S. 89)



$$1.63: f_a(x) = \frac{x^3 - 8a^3}{ax^2}$$

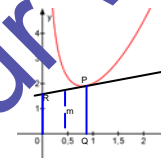
(S. 90)

**(E) Trapezinhalte**

91

$$1.71: f_1(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

(S. 91)

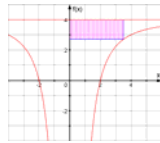


Grundaufgabe 2: Umfang eines Vierecks

92

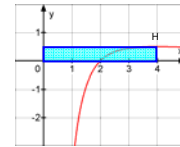
2.01: $f(x) = 4 \frac{x^2 - 4}{x^2} = 4 - \frac{16}{x^2}$

(S. 92)



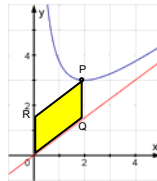
2.02: $f_t(x) = \frac{4}{x} - \frac{4t}{x^2}$

(S. 93)



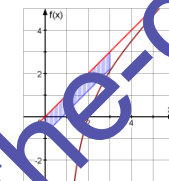
2.03: $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{3}{x} = \frac{3x^2 + 12}{4x}$

(S. 94)



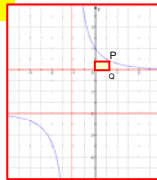
2.04: $f_a(x) = \frac{x^3 - 8a^3}{ax^2}$

(S. 95)



2.05: $f(x) = \frac{2}{3 \cdot e^x - 1}$

(S.97)

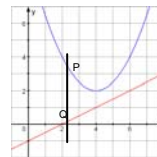


Grundaufgabe 3: Längen, Abstände

98

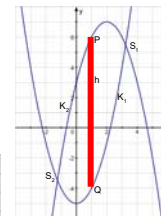
3.01: $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 10$ und $y = \frac{1}{2}x - 1$.

(S. 98)



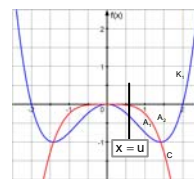
3.02: $f(x) = x^2 - 5$ und $g(x) = -x^2 + 4x + 3$

(S. 100)



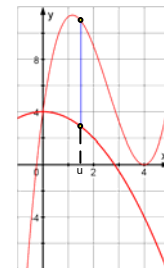
3.03: $f_t(x) = \frac{1}{4}x^4 - t^2x^2$

(S. 102)



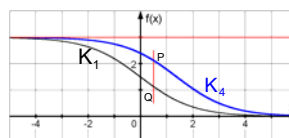
3.04: $f(x) = x^3 - \frac{31}{4}x^2 + 14x + 4$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$

Kürzeste und größte Entfernung zwischen den Kurven. (S. 103)



3.05: $f_k(x) = \frac{3t}{e^x + t}$ für $t > 0$

Längste Strecke zwischen K_1 und K_4 . (S. 105)



Demo-Text für www.mathe-cd.de

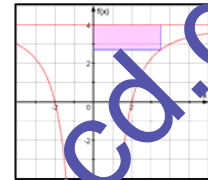
- 3.06: $y = \frac{2}{3x}$ Kürzeste Entfernung vom Ursprung.
(S. 107)



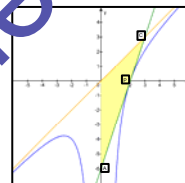
Grundaufgabe 4: Volumenfunktionen

109

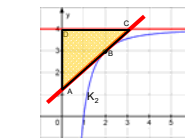
- 4.01: $f(x) = 4 - \frac{16}{x^2}$ Rotation um die y-Achse
(S. 10)



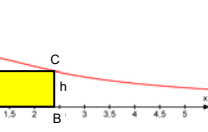
- 4.02: $f(x) = 4 - \frac{16}{x^2}$ Rotation um die x-Achse, Ringkörper
(S. 110)



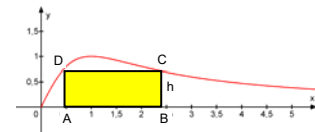
- 4.03: $f(x) = x - \frac{8}{x^2}$ Rotation um die y-Achse
(S. 112)



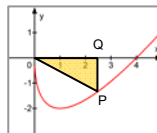
- 4.04: $f_t(x) = t^2 - \frac{4}{x^2}$ Rotation um beide Achsen
(S. 113)



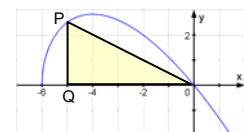
- 4.05: $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ Rotation um die x-Achse
(S. 114)



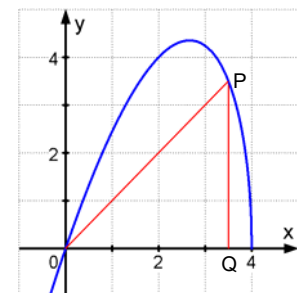
- 4.06: $f(x) = 2x - 4\sqrt{x}$ Rotation um die x-Achse
(S. 115)



- 4.07: $f(x) = -\frac{1}{2}x \cdot \sqrt{x+6}$ Rotation um die x-Achse
(S. 118)



- 4.08: $f(x) = x \cdot \sqrt{8-2x}$ Rotation um die x-Achse
(S. 119)



- 4.09: $f(x) = x \cdot \sqrt{8-2x}$ Rotation um die y-Achse!
(S. 120)

Zusammenfassung der Methoden

122

Hintergrundwissen

Die Mathematik verwendet Funktionen zur Berechnung von Werten.

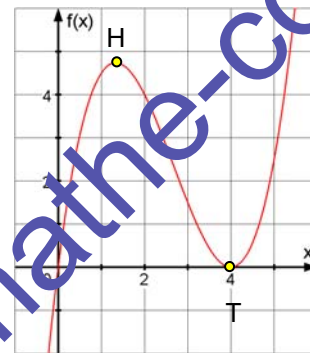
Beispiel

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$ kann jeder Zahl ihres Definitionsbereiches $D = \mathbb{R}$ eine reelle Zahl zuordnen. Die Berechnung des Funktionswertes geschieht durch Einsetzen:

$$f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 8 - 4 \cdot 4 + 8 \cdot 2 = 4 - 16 + 16 = 4$$

Die Funktion f ordnet also der Zahl 2 den Wert 4 zu.

Die Paare, gebildet aus Zahl und zugeordnetem Wert, kann man als Punkte im Koordinatensystem darstellen. Der Punkt $(2 | 4)$ gehört daher zum Schaubild von f .



Das „komplette“ Schaubild ist die abgebildete Kurve.

Die Funktionswerte werden als y-Koordinaten verwendet.

Für die praxisorientierte Mathematik interessieren oftmals nicht einzelne Wertepaare der Funktion bzw. Punkte des Schaubilds. Viel wichtiger ist oftmals die Frage nach der Änderung der Funktion:

In welchen Bereichen nehmen die Funktionswerte zu?

Wo nehmen sie ab?

Verfolgen wir die Funktion f an Hand der Abbildung.

Man kann sagen, dass offenbar die Funktionswerte von links ($-\infty$) her zunehmen, bis sie an einer Stelle, die bei 1,4 liegen könnte, einen maximalen Wert erreichen. Dieser wird etwa die Größe 4,7 haben. Dann nehmen die Funktionswerte wieder ab und scheinen bei $x = 4$ ein Minimum vom Wert 0 zu erreichen. Von da ab scheinen sie wieder zuzunehmen.

Dabei muss man betonen, dass das Ablesen eines solchen Verhaltens aus einer Abbildung problematisch ist. Erstens zeigt sie nur einen Ausschnitt, so dass man nicht erkennen kann, was links und rechts außen passiert. Dort können weitere Extremwerte (Minima oder Maxima) liegen. Ferner kann es so kleine Schwankungen geben, dass sie in dieser Abbildung gar nicht zu sehen sind. Wir sind also auf Berechnungen angewiesen.

Weiter muss betont werden, dass das bei etwa 1,4 erreichte Maximum nur ein lokales Maximum ist, denn rechts von 5,3 gibt es wieder größere Werte. Dasselbe gilt für das Minimum bei 4. Links von 0 gibt es kleinere Werte.

Also sind solche Minima und Maxima nur für einen bestimmten Bereich Extremwerte.
Daher heißen sie auch relative Extremwerte.

Man muss also auch untersuchen, was in den Randbereichen passiert.

Die Berechnung dieser Extremwerte geschieht mit den Hilfsmitteln der Ableitungen:

Man berechnet $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8$ und $f''(x) = 3x - 8$.

Wie es weiter geht, hat man beim Thema Kurvendiskussion gelernt. In den beiden Extrempunkten H und T besitzt die Kurve eine waagrechte Tangente. Dort ist also die Tangentensteigung 0, weshalb man mit der Bedingung: $f'(x) = 0$ nach diesen Punkten sucht. Man nennt sie die Notwendige Bedingung.

Diese führt hier auf die quadratische Gleichung: $\frac{3}{2}x^2 - 8x + 8 = 0$

mit der Lösung
$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8}}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{3} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{3} = \frac{8 \pm 4}{3} = \left\{ \begin{array}{l} 4 \\ \frac{4}{3} \end{array} \right.$$

Nun kennen wir die Extremstellen: 4 und $\frac{4}{3} \approx 1,33$.

Die extremen Werte dazu erhält man durch Einsetzen in die Funktion:

$$f(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^3 - 4 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 64 - 4 \cdot 16 + 32 = 0 \text{ und}$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{64}{27} - 4 \cdot \frac{16}{9} + 8 \cdot \frac{4}{9} = \frac{32 - 192 + 288}{27} = \frac{128}{27} \approx 4,74.$$

Mit der 2. Ableitung f'' kontrolliert man nun die Krümmung der Kurve an diesen Stellen.

Man nennt diese Rechnung die Überprüfung der Hinreichenden Bedingung:

Kontrolle:

$f''(4) = 12 - 8 > 0$	Das Schaubild hat also im Punkt $P(4 0)$ <u>Linkskrümmung</u> . Also liegt ein Tiefpunkt vor. Die Funktion hat somit bei $x = 4$ ein <u>lokales Minimum!</u>
$f''\left(\frac{4}{3}\right) = 3 \cdot \frac{4}{3} - 8 = 4 - 8 < 0$	Das Schaubild hat also im Punkt $P\left(\frac{4}{3} \mid \frac{128}{27}\right)$ <u>Rechtskrümmung</u> . Also liegt ein Hochpunkt vor. Die Funktion hat somit bei $x = \frac{4}{3}$ ein <u>lokales Maximum!</u>

Wir lösen die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ stets mit der allgemeinen

Lösungsformel ("Mitternachtsformel"):
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die meist gelehrt p-q-Formel wird in meinen Manuskripten nicht verwendet, weil sie in vielen Aufgaben unhandlich ist. Wenn der Koeffizient a den günstigen Wert $\frac{1}{2}$ hat, dann wird diese Formel besonders handlich, weil dann im Nenner $2a = 1$ steht. Dann kann man bekanntlich den Nenner samt Bruchstrich weglassen. Siehe Datei Nr. 12230.

Zusammenfassung:

1. Mit der Notwendigen Bedingung $f'(x) = 0$ erhält man die Extremstellen der Funktion.
2. Setzt man diese in $f(x)$ ein, erhält man die Extremwerte (falls welche existieren).
3. Die Entscheidung darüber, ob ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum vorliegt, liefert die Hinreichende Bedingung:
Man setzt in $f''(x)$ ein und entscheidet:

Bei $f''(x_1) > 0$ hat f an der Stelle x_1 ein lokales Minimum
bei $f''(x_2) < 0$ hat f an der Stelle x_2 ein lokales Maximum.
4. Um festzustellen, ob es sich um absolute Extremwerte handelt, muss man die Randwerte untersuchen.

Unter dem Stichwort EXTREMWERTAUFGABEN versteht man nun spezielle Funktionen, die sich aus Anwendungen ergeben. Bei ihnen hat die Funktion f eine bestimmte Bedeutung.

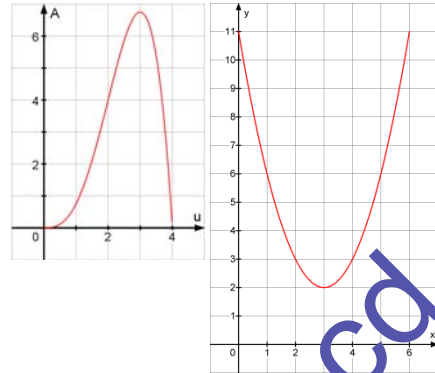
Sehr oft beschreibt diese sogenannte „Zielfunktion“ Flächeninhalte, Streckenlängen, Rauminhalte von Körpern.

Wie man diese Problematik untersucht, wird in den folgenden Abschnitten beschrieben. Dazu folgt auf der nächsten Seite eine Übersicht über das, was dabei passieren kann.

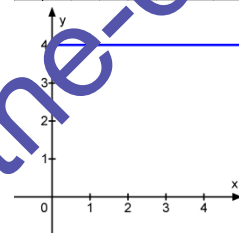
Übersicht

1. Fall: Eine Zielfunktion (das ist die Funktion, für die man einen Extremwert sucht, die also einen Flächeninhalt oder etwas anderes beschreibt), **kann ein Maximum haben, oder ein Minimum.**

Die Extremstelle ist dann die Nullstelle der 1. Ableitungsfunktion, die im Definitionsbereich liegt, der zur Zielfunktion gehört.

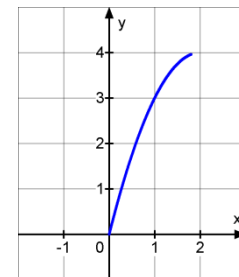


2. Fall: Es kann auch vorkommen, dass man eine **konstante** Zielfunktion erhält, etwa $A(u) = 4$. Da existiert natürlich kein Extremwert.



3. Fall: Es gibt **Zielfunktionen, die streng monoton wachsen**. Ihre Werte nehmen dann in D beispielsweise von 0 bis 4 zu. In einem solchen Falle findet man keine Extremstelle, die in D liegt. Man muss dann zeigen, dass in D gilt: $A'(u) > 0$.

Sollte in so einem Fall der rechte Rand (hier ist es $x = 1,8$) zum Definitionsbereich der Zielfunktion gehören, dann hat diese dort ihr Maximum. Dieses tritt aber nicht als Lösung der Gleichung $A'(x)=0$ auf, sondern muss über eine Randwertbetrachtung identifiziert werden. (Manches gilt natürlich auch für Zielfunktionen, die in D **streng monoton fallen**.)



Grundaufgabe 1: Flächeninhaltsfunktionen

(A) Dreiecke mit Eckpunkt auf einer Kurve

1.01 $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2$

$P(u|v)$ sei ein Punkt auf dem Schaubild K von f mit $0 < u < 4$.

Fällt man von P das Lot auf die x -Achse, erhält man den Punkt Q .

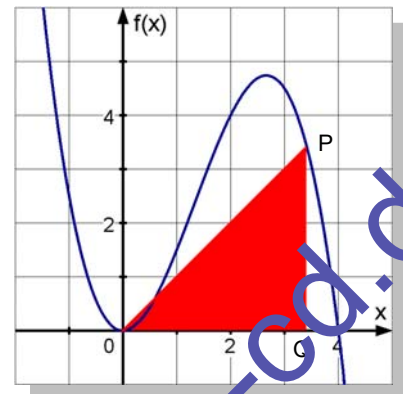
Stelle eine Formel für die Funktion $A(u)$ auf, welche den Flächeninhalt des Dreiecks OPQ beschreibt.

Bestimme die Extremwerte dieser Flächeninhaltsfunktion.

Mit anderen Worten: Für welchen Wert von u (oder: Für welche

Lage von P) nimmt der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ einen extremen Inhalt an?

Bestimme Art und Größe des Extremwerts.



Das ist eine typische Extremwertaufgabe, die wir ganz ausführlich lösen wollen.

Lösung

1. Schritt: Aufstellen der Zielfunktion (damit meint man hier die Flächeninhaltsfunktion):

Die Grundformel für einen Dreiecksinhalt ist $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.

Als Grundseite wählt man hier die Strecke OQ , als Höhe QP .

Jetzt ist es wichtig, die Koordinaten des Punktes $P(u|v)$ zu verwenden.

Denn Q liegt senkrecht unterhalb von P , also hat Q dieselbe x -Koordinate, nämlich u .

Die Grundseite OQ hat somit die Länge u .

Die Höhe ist (weil Q auf der x -Achse liegt) hier genau die y -Koordinate von P , also v .

Damit lautet der Flächeninhalt von OPQ : $A = \frac{1}{2} \cdot u \cdot v$.

Jetzt muss man beachten, dass P ja nicht irgendein Punkt ist, sondern dass er auf dem Schaubild der Funktion f liegt, P liegt auf der Kurve K .

Damit kann man seine y -Koordinate aus der Funktionsgleichung berechnen: $v = f(u)$.

Also lautet jetzt die Flächeninhaltsfunktion: $A = \frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u)$.

Wir kennen aber $f(x)$, also auch $f(u) = -\frac{1}{2}u^3 + 2u^2$

Dies setzt man ein und erhält die Flächeninhaltsfunktion:

$$A(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot \left(-\frac{1}{2}u^3 + 2u^2\right) \quad \text{also} \quad A(u) = -\frac{1}{4}u^4 + u^3$$

2. Schritt: Festlegung des Definitionsbereichs von $A(u)$:

In der Aufgabe steht „mit $0 < u < 4$ “. Das schränkt die Wahl von u ein und ist schon der Definitionsbereich.

Man kann ihn als offenes Intervall so schreiben: $D_u =] 0 ; 4 [$.

3. Schritt: Berechnung der Extremwerte:

Zielfunktion: $A(u) = -\frac{1}{4}u^4 + u^3$

Ableitungen: $A'(u) = -u^3 + 3u^2$

$$A''(u) = -3u^2 + 6u$$

Extremwertbedingung (Notwendige Bedingung):

$$A'(u) = 0$$

$$-u^3 + 3u^2 = 0 \quad u^2 \text{ ausklammern!}$$

$$u^2(-u + 3) = 0 \quad \text{Nullprodukt: Jeder Faktor wird 0!}$$

$$u^2 = 0 \Rightarrow u_1 = 0 \quad \text{Dieser Wert liegt nicht in } D_u!$$

$$u_2 = 3 \quad \text{Nur der kommt in Frage.}$$

Kontrolle (Hinreichende Bedingung):

$$A''(3) = -3 \cdot 9 + 6 \cdot 3 = -27 + 18 = -9 < 0$$

Ein negativer Wert führt zu einem lokalen Maximum.

Berechnung des maximalen Werts:

$$A(3) = -\frac{1}{4} \cdot 81 + 27 = \frac{-81+108}{4} = \frac{27}{4}$$

4. Schritt: Randwertuntersuchung:

Die beiden Randstelle des Definitionsbereichs $D_u =] 0 ; 4 [$ sind 0 und 4.

Für $u \rightarrow 0$ entartet das Dreieck zu einem Punkt und für $u \rightarrow 4$ zu einer Strecke.

Daher liegt in diesen Fällen kein Dreieck mehr vor, also darf die Flächeninhaltsfunktion nicht mehr direkt eingesetzt werden. Also rechnet man jetzt mit Grenzwerten:

$$\lim_{u \rightarrow 0} A(u) = \lim_{u \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{4}u^4 + u^3 \right) = 0$$

$$\lim_{u \rightarrow 4} A(u) = \lim_{u \rightarrow 4} \left(-\frac{1}{4}u^4 + u^3 \right) = 0$$

Die Flächeninhaltsfunktion ist als ganzrationale Funktion überall stetig. Daher darf man diese beiden Grenzwerte durch Einsetzen berechnen.

(Dass das Ergebnis 0 ist, weiß man auch schon daher, dass das Dreieck am Rand zum Punkt entartet.)

5. Schritt: Auswertung und Ergebnis:

Weil die Werte zum Rand hin gegen 0 gehen, ist das lokale Maximum sogar ein globales.

Ergebnis: Der Dreiecksinhalt nimmt bei $u = 3$ ein absolutes Maximum vom Wert $\frac{27}{4}$ an.

Zusatz:

Man kann die Flächeninhaltsfunktion natürlich auch noch grafisch darstellen. Dies wird in Aufgaben eigentlich nicht erwartet, hilft aber dem Schüler, sein Ergebnis zu überprüfen.

Nützlich sind in diesem Zusammenhang Grafik-Rechner oder CAS-Rechner, die solche Schaubilder schnell liefern.

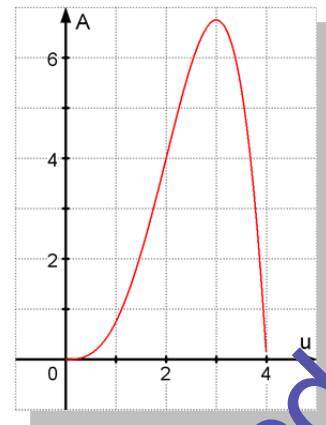
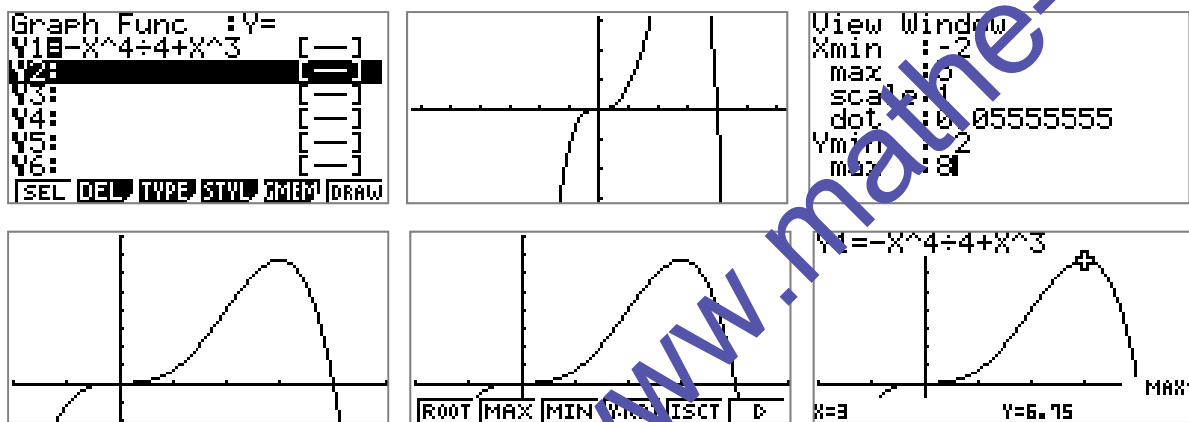


Schaubild mit dem Grafik-Rechner CASIO fx-9860G:



Erklärung: Nach der Eingabe des Funktionsterms klickt man auf F6 (DRAW). Weil die Ansicht nicht zufriedenstellend ist, öffnet man mit F3 (V-Window) das Fenster zum Einstellen des Bildschirms.

Dann kann man zufrieden sein. Nach Klick auf F5 (G-Solve) erhält man das kleine

Menü am unteren Bildrand. F2 liefert dann die Bestimmung des Maximums, das dann auch angezeigt wird: Bei $x = 3$ hat man $y = 6,75$.

Hier der CAS-Rechner TI Nspire mit der zugehörigen Fenstereinstellung:

